

Małgorzata Gut¹

Instytut Psychologii, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Institute of Psychology, Nicolaus Copernicus University in Toruń

Kształtowanie umysłowych reprezentacji liczb za pomocą ruchu i gier komputerowych w okresie wczesnoszkolnym

Streszczenie

Liczby posiadają poznawcze reprezentacje w umyśle człowieka, które kształtują się w toku rozwoju jednostki i są utrwalane na bazie doświadczenia oraz mają dobrze udokumentowane neuronalne podstawy. Wiadomo również, że neuroplastyczność pozwala na efektywne ćwiczenie (a więc rozwój lub poprawę) zarówno funkcji poznawczych, jak i ruchowych. Czy trening motoryczny może mieć jednak coś wspólnego z rozwojem poznawczym? Czy procesy poznawcze są „ucieleśnione” i czy przez ruch możemy wpływać na poziom zdolności poznawczych? Dynamiczny rozwój nowoczesnych technologii, które znalazły zastosowanie w edukacji i terapii, spowodował, że wspierane komputerowo metody rozwijające zdolności matematyczne stają się coraz bardziej popularne. Wyniki licznych badań wskazują na to, że programy ćwiczeń z wykorzystaniem gier komputerowych doskonale sprawdzają się nie tylko w edukacji i rozwijaniu zdolności poznawczych istotnych w kształtowaniu kompetencji matematycznych czy utrwalaniu umysłowych reprezentacji liczb. Okazują się one również skuteczną metodą pokonywania deficytów u osób z problemami w zakresie matematyki. Niniejszy artykuł stanowi przegląd najważniejszych wyników badań dotyczących tego zagadnienia.

Słowa kluczowe: treningi poznawcze, gry komputerowe, edukacja matematyczna, dyskalkulia, poznanie matematyczne

Mental representations of number formation in early school period, using motor functions and computer games

Abstract

Numbers have cognitive (mental) representations that have neuronal underpinnings and are shaped in development and strengthened based on experience. It is also known that neuroplasticity allows the effective training (and therefore development or improvement) of both cognitive and motor functions. Can motor training have anything

1 ORCID: 0000-0001-6540-7192. Adres do korespondencji: mgut@umk.pl.

to do with the effectiveness of cognitive training? Are cognitive processes embodied, and can we influence cognitive ability through movement? The dynamic development of modern technology that is applied in education and therapy has made computer-assisted training of cognitive and motor functions increasingly popular. As many studies indicate, cognitive training and cognitive-motor training using computer games are very effective not only in education and development of mathematical competency, but also in overcoming deficits in people suffering from problems with maths. This article provides a review of the most important research results on this issue.

Keywords: cognitive training, computer games, mathematical education, dyscalculia, mathematical cognition

Wprowadzenie

Umiejętności związane z posługiwaniem się liczbami – podobnie jak wiele innych zdolności – mają podłoże neuronalne. Prawidłowo rozwijający się mózg (w tym wypadku szczególnie struktury istotne z punktu widzenia przetwarzania liczb i przestrzeni) stanowi bazę optymalnego poziomu tych umiejętności. Nieprawidłowości rozwojowe (lub uszkodzenia) we wspomnianych obszarach prowadzą zaś do deficytów poznawczych i trudności w zakresie matematyki. Mózg jest jednak niezwykle plastyczną strukturą, co oznacza, że przez niemal całe życie można ćwiczyć pewne umiejętności, a odbywa się to poprzez „trening mózgu” z użyciem odpowiednich metod (Skibska, 2015). Z jednej strony ćwiczenia takie mogą być skierowane do osób prawidłowo funkcjonujących i wtedy stanowią będą metody rozwijania potencjału, a więc okażą się przydatne np. w edukacji matematycznej. Z drugiej, mogą być pomocne dla osób, które wskutek wspomnianych nieprawidłowości przejawiają trudności w nauce matematyki (stanowią wówczas rodzaj narzędzia terapeutycznego). Postęp technologii, zarówno w zakresie metod badania mózgu, jak i opracowywania programów treningowych, zaowocował obiecującymi wynikami badań nad efektywnością komputerowych metod w stymulowaniu i rozwijaniu neuronalnej bazy procesów umysłowych niezbędnych do operowania liczbami (Moeller et al., 2015). Dokonany tu przegląd literatury pozwala zapoznać się z aktualnym stanem wiedzy na temat neurobiologicznych podstaw umiejętności matematycznych oraz problemów z przetwarzaniem liczb (dyskalkulia). Jednocześnie pozwoli on przyjrzeć się kwestii możliwości, jakie dają obecnie komputerowe metody (przede wszystkim gry) odnośnie do rozwijania tych umiejętności (jako alternatywne metody edukacji matematycznej) czy pokonywania problemów (wspierając terapię dyskalkulii). Przegląd literatury zakończy omówienie wyników badań nad zastosowaniem tego rodzaju treningów poznawczych, ale w połączeniu z ruchem.

Umysłowe reprezentacje liczb i ich neuronalne podstawy

Rozważania dotyczące skuteczności komputerowych programów ćwiczenia umiejętności matematycznych należy rozpocząć od określenia, jakie struktury mózgowie stanowią podstawę rozwijania takich zdolności. Pierwsze umysłowe reprezentacje liczb kształtują się bardzo wcześnie (Butterworth, 2005; Brożek, Hohol, 2018) i w błędzie jest ten, kto sądzi, że posługiwanie się liczbami to wyłącznie skutek edukacji czy – ogólnie – rezultat doświadczenia i stymulacji środowiska. Człowiek posługuje się kilkoma typami mentalnych reprezentacji liczb i część z nich kształtuje się rzeczywiście w okresie przedszkolnym lub wczesnoszkolnym pod wpływem doświadczeń. Jednak pewne umiejętności numeryczne są wrodzone i przejawy ich istnienia można obserwować od urodzenia, a bazą ich prawidłowego rozwoju jest niezakłócony rozwój struktury neuronalnej w obrębie kory ciemieniowej (Butterworth, 2005; von Aster, Shalev, 2007). Ta pierwsza reprezentacja liczb związana jest z tzw. poczuciem liczby (zmysłem numerycznym, ang. *number sense*) (Dehaene, Cohen, 1997) i ma charakter analogowy, a jej istnienie manifestuje się zdolnością do różnicowania liczebności zbiorów, szacowania i tzw. subitacji, czyli natychmiastowego, bezwysiłkowego i dokładnego określania liczebności bardzo małych zbiorów (do czterech elementów łącznie). Posługiwanie się nią w operowaniu materiałem numerycznym można zaobserwować już u kilkumiesięcznych niemowląt (Patro et al., 2014; Landerl, Kaufmann, 2015), a nawet noworodków (Bijeljac-Babic et al., 1993). Co więcej, szeroki wachlarz zdolności numerycznych mają liczne gatunki zwierząt (Trojan, 2013), co potwierdza istnienie biologicznych podstaw i długiej ewolucyjnej historii rozwoju umiejętności posługiwania się liczbami, a także wskazuje na to, że operowanie nimi w takiej postaci (liczebności zbiorów) nie wymaga posługiwania się językiem.

Kolejnymi typami umysłowych reprezentacji liczb są: werbalna, symboliczna wzrokowa i przestrzenna (von Aster, Shalev, 2007). Pierwsza z nich, kształtująca się w okresie przedszkolnym, związana jest z posługiwaniem się liczebnikami, a przejawem jej istnienia są umiejętności słownego odliczania, przyswajanie i wydobywanie z pamięci faktów arytmetycznych (np. „ $2 + 3 = 5$ ”). Jej bazą neuronalną są obszary wokół bruzdy Sylwiusza lewej półkuli mózgu (Dehaene, Cohen, 1997; Butterworth, 1999). U progu szkoły obserwujemy u dzieci umiejętności świadczące o posługiwaniu się kolejnym typem – reprezentacją symboliczną wzrokową, oznaczającą zdolność do posługiwania się liczbami prezentowanymi w postaci cyfr arabskich (lub innych, które stanowią dominujący w danej kulturze system zapisu). Obszarem kluczowym do ukształtowania się tego typu reprezentacji i posługiwania się nim jest sieć potyliczno-skroniowa (Butterworth, 1999). Czwarty typ stanowi reprezentacja przestrzenna, związana z operowaniem

tw. mentalną osią liczbową (ang. *mental number line*, MNL) (Restle, 1970), czyli uporządkowaniem liczb zgodnie z ich wartością numeryczną: mniejsze wartości liczbowe są reprezentowane po lewej stronie osi, większe zaś – po prawej. MNL jest podstawą do wykonywania operacji arytmetycznych, przybliżonych obliczeń i porównywania liczb, a jej neuronalną bazą są obszary kory ciemieniowej (Hubbard et al., 2005; Bugden et al., 2012).

Kształtowanie się wspomnianych typów reprezentacji liczb, efektywne posługiwanie się nimi i sprawne przekształcanie jednych w drugie uwarunkowane jest prawidłowym rozwojem wspomnianych struktur neuronalnych i połączeń między nimi. Neurobiologiczna baza zdolności numerycznych została dość dobrze udokumentowana, najpierw dzięki badaniom klinicznym, a następnie w badaniach przy użyciu metod neuroobrazowania. Jak wspomniano, podłoże operowania liczbami zlokalizowano głównie w obszarach ciemieniowych i czołowych (Dehaene et al., 2004; Simon et al., 2004; Hubbard et al., 2005; Butterworth et al., 2011). Obszar o najważniejszym znaczeniu dla przetwarzania liczb znajduje się w horyzontalnej części tzw. bruzdy śródciemieniowej. Neuroobrazowanie funkcjonalne wykazało aktywację tego regionu podczas detekcji prezentowanych wzrokowo i słuchowo liczb (Eger et al., 2003) oraz ich porównywania (Piazza et al., 2007; Cao, Li, Li, 2010), podczas gdy obszar znajdujący się z tyłu i wyżej w stosunku do bruzdy śródciemieniowej jest powiązany z przeliczaniem, ale też z uwagą przestrzenną (Dehaene et al., 2003; Hubbard et al., 2005). Innym obszarem ciemieniowym ważnym dla przetwarzania liczb jest lewy zakręt kątowy, aktywujący się podczas wykonywania obliczeń oraz operacji matematycznych zależnych od języka, np. wydobywania faktów arytmetycznych (Delazer et al., 2003). Sieć czołowo-ciemieniowa jest aktywna podczas wykonywania bardziej złożonych operacji numerycznych, wymagających np. przechowywania w pamięci operacyjnej wyników działań arytmetycznych (Nieder, Dehaene, 2009; Arsalidou, Taylor, 2011). Należy jednak podkreślić, że wzorzec organizacji funkcjonalnej mózgu właściwy dla operowania liczbami zmienia się wraz z rozwojem. Jak pokazują metaanalizy (Houde et al., 2010), u dzieci 6–7 letnich podczas porównywania wartości liczbowych aktywują się głównie struktury czołowe, u dorosłych zaś dominują aktywacje ciemieniowe i potyliczno-skroniowe. A zatem organizacja funkcjonalna mózgu związana z przetwarzaniem liczb dynamicznie się zmienia w procesie rozwoju (Ansari, 2008).

Dyskalkulia: objawy i korelaty neuronalne

Z czym natomiast mamy do czynienia, gdy wspomniane wcześniej struktury mózgowe, kluczowe dla przetwarzania liczb, nie rozwijają się prawidłowo? Problemy z nauką matematyki są przykładem deficytów

obserwowanych u dzieci i jednym z behawioralnych efektów nieprawidłowości rozwojowych w obrębie kory ciemieniowej.

Jednym z nich jest dyskalkulia, definiowana jako specyficzna niezdolność do operowania liczbami i działaniami arytmetycznymi przy jednoczesnym prawidłowym (w normie) poziomie inteligencji i pamięci roboczej (Landerl, Bevan, Butterworth, 2004; Butterworth, Varma, Laurillard, 2011; Landerl, Kaufmann, 2015). Częstość jej występowania w populacji szacuje się na 5–7% (Shalev, Manor, Gross-Tsur, 2005; Shalev, 2007), choć warto pamiętać, że wiele osób z dyskalkulią nie zostało w ogóle prawidłowo zdiagnozowanych. Dzieci z dyskalkulią, w porównaniu z prawidłowo rozwijającymi się rówieśnikami, wykazują problemy w zakresie tak elementarnych umiejętności jak przeliczanie obiektów, nazywanie czy porównywanie liczb, zadania arytmetyczne, wydobywanie faktów arytmetycznych. Dzieci te stosują też często niedojrzałe i nieskuteczne strategie w takich zadaniach (Geary et al., 2004; Landerl, Bevan, Butterworth, 2004; Rouselle, Noël, 2007). Dyskalkulia stanowi poważną przeszkodę nie tylko z punktu widzenia codziennego funkcjonowania takich osób i ich rodzin oraz z perspektywy nauczycieli dzieci z dyskalkulią. Jest to również poważny problem o charakterze społeczno-ekonomicznym.

Literatura wskazuje (Butterworth, Varma, Laurillard, 2011), że konsekwencje wynikające z dyskalkulii są znacznie bardziej dotkliwe niż te wynikające np. z dysleksji. Osoby z dyskalkulią mniej zarabiają, częściej chorują, wymagają większego wsparcia w szkole, a nawet częściej popadają w konflikt z prawem. Co więcej, analizy prowadzone przez takie organizacje jak OECD² wskazują na to, że trudności w zakresie matematyki wprost rzutują na sytuację ekonomiczną kraju. Dyskalkulia jest wynikiem zaburzonego zmysłu numerycznego, który ma neuronalne podstawy właśnie w korze ciemieniowej, a reprezentacja liczebności – będąca jego ważną składową – jest bazową umiejętnością w rozwoju kompetencji arytmetycznych (Butterworth, 2010). Osoby nią dotknięte ujawniają też niski poziom szacowania miejsca liczb na osi, a więc nie operują prawidłowo MNL (Geary et al., 2008; 2012; Gut et al., 2018).

Co wiadomo z badań nad organizacją mózgu u osób z trudnościami w przetwarzaniu materiału numerycznego? Manuela Piazza, Philippe Pinel, Denis Le Bihan i Stanislas Dehaene (2010) wykazali, że zaburzone operowanie reprezentacjami liczb idzie w parze z nieprawidłowościami w obrębie obszarów będących podstawą neuronalną MNL. Wszystko to dodatkowo

2 OECD – Organizacja Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (ang. *Organization for Economic Cooperation and Development*) – to międzynarodowa organizacja gospodarcza, do której należą najbardziej uprzemysłowione i rozwinięte ekonomicznie kraje o ustroju demokratycznym (Polska pozostaje jej członkiem od roku 1996) [przyp. red.].

potwierdza, że liczby są reprezentowane w umyśle m.in. przestrzennie oraz że ta relacja numeryczno-przestrzenna ma duży wpływ na poziom umiejętności matematycznych (choć – jak przekonamy się dalej – nie każdy typ zależności między liczbami a przestrzenią jest predyktorem kompetencji arytmetycznych). Formowanie się MNL jest jednym z najważniejszych kroków w rozwoju tych umiejętności (von Aster, Shalev, 2007).

Neuroobrazowanie mózgu osób z dyskalkulią ujawniło m.in. atypową głębokość bruzdy śródciemieniowej oraz redukcję poziomu aktywacji w obrębie sieci czołowo-ciemieniowej podczas porównywania liczb w formacie niesymbolicznym i symbolicznym (Price et al., 2007; Mussolin et al., 2009) oraz podczas wykonywania zadań arytmetycznych (Kucian et al., 2006). Ponadto u osób z dyskalkulią obserwuje się mniejszą objętość substancji szarej w lewej bruzdzie śródciemieniowej (Isaacs et al., 2001) lub prawej (Rotzer et al., 2008), natomiast Elena Rykhlevskaia, Lucina Q. Uddin, Leeza Kondos i Vinod Menon (2009) stwierdzili tego rodzaju redukcję objętości w tym obszarze w obu półkulach. Badania nad funkcjonalnymi połączeniami między obszarami ciemieniowymi zaangażowanymi w przetwarzanie liczb oraz połączeniami między korą ciemieniową a potyliczno-skroniową wykazały też, że u osób z dyskalkulią wzorzec współaktywacji tych struktur nie jest prawidłowy (Rykhlevskaia et al., 2009).

Zależności między liczbami a przestrzenią

Jak wspomniano wyżej, liczby są umysłowo reprezentowane m.in. w charakterze przestrzennym, jako lokalizacje na MNL. Wyniki badań klinicznych oraz behawioralnych i psychofizjologicznych z udziałem zdrowych ochotników potwierdzają istnienie wyraźnej relacji między liczbami a przestrzenią (ang. *Spatial-Numerical Association*, SNAs), gdyż przetwarzanie liczb i przestrzeni ma wspólne neuronalne podłoże (Hubbard et al., 2005; Sandrini, Rusconi, 2009). Układ przestrzenny liczb znajduje odzwierciedlenie w wykonaniu zadań opartych na tej relacji (np. wpływa na czas odpowiedzi na liczby o określonej wielkości numerycznej) (Fias, Fischer, 2005; Wood, Fischer, 2008; Fischer, Shaki, 2014). Zależność liczbowo-przestrzenna została dowiedziona u dzieci w okresie wczesnoszkolnym (van Galen, Reitsma, 2008), przedszkolnym (Patro, Haman, 2012), a nawet u niemowląt (de Hevia, Spelke, 2010; Patro et al., 2014) i różnych gatunków zwierząt (Rugani et al., 2015).

Dlaczego jest to ważne w kontekście poziomu umiejętności matematycznych? Zdaniem wielu badaczy zależność ta jest podstawą rozwoju kompetencji w zakresie arytmetyki (Booth, Siegler, 2006). Opisano szereg przejawów jej istnienia (Patro et al., 2014; Cipora, Patro, Nuerk, 2015), co oznacza, że

oba typy informacji wchodzi w interakcję na wiele sposobów. Nie wszystkie korelują jednak z poziomem umiejętności matematycznych lub korelacja ta wydaje się co najmniej dyskusyjna (Cipora et al., 2015; w przytoczonym źródle można się zapoznać z obszerną, opartą na literaturze, dyskusją dotyczącą kwestii, które typy SNA są predyktorami umiejętności arytmetycznych). Do efektów ilustrujących zależność między liczbami a przestrzenią należy tzw. efekt SNARC (ang. *Spatial Numerical Association of Response Codes*), będący jednym z najlepiej udokumentowanych w literaturze i najbardziej wyraźnych markerów tej relacji. Manifestuje się on tym, że na liczby o wyższej wartości liczbowej reagujemy szybciej, gdy odpowiedź udzielana jest po prawej stronie ciała (np. prawą ręką lub stopą, ruchem oczu w prawo), natomiast na liczby o niskiej wartości – gdy odpowiedź jest udzielana za pomocą reakcji po lewej stronie (Dehaene, Bossini, Giroux, 1993). Efekt ten udało się replikować w licznych badaniach przy użyciu bardzo różnych zadań eksperymentalnych i rodzajów bodźców (Fias, Fischer, 2005; Wood et al., 2008; Fias, van Dijck, Gevers, 2011; Fischer, Shaki, 2014) i widoczny jest nawet wtedy, gdy sama wartość liczbową jest nieistotna dla zadania (Lammertyn, Fias, Lauwereyns, 2002). Efekt SNARC okazuje się również niezależny od modalności bodźca (Fischer, Shaki, Cruise, 2009) i od notacji liczby (Ganor-Stern, Tzelgov, 2008), ponieważ widoczny jest dla liczb prezentowanych wzrokowo i słuchowo, w formie cyfr arabskich, liczebników, zbiorów kropek. Od czego natomiast efekt ten zależy? Badania dowodzą wpływu na kierunek tej zależności m.in. takich czynników kulturowych, jak kierunek pisania i czytania (Shaki, Fischer, Petrusic, 2009). Warto jednak podkreślić, że odwrotny kierunek pisma nie zawsze przekłada się na odwrócony efekt SNARC, a jedynie np. na jego mniejszą siłę bądź całkowity jego brak. To tylko podkreśla, że relacja numeryczno-przestrzenna jest uwarunkowana biologicznie, wpływy środowiskowe (doświadczenie) wyraźnie „nakładają” się zaś w swoim oddziaływaniu na biologiczne podstawy.

Co jednak ciekawe, siła omawianego efektu niekoniecznie koreluje z poziomem umiejętności arytmetycznych dzieci lub zależność ta jest co najmniej dyskusyjna. Wyniki niektórych badań wskazują na istnienie pozytywnego związku między siłą efektu SNARC a poziomem kompetencji numerycznych (Georges, Hoffmann, Schiltz, 2017), czyli sugerują, że im bardziej wyraźna jest wspomniana zależność liczbowo-przestrzenna, tym wyższy poziom umiejętności matematycznych. Jednak inne badania ujawniły wręcz przeciwną zależność: niski poziom umiejętności matematycznych idzie w parze z dużą siłą efektu SNARC; istnieją również dane wskazujące na brak takiej korelacji w ogóle (Bonato et al., 2007; Cipora, Nuerk, 2013). Należy dodać, że związek między siłą efektu SNARC a poziomem kompetencji matematycznych zdaje się zależeć od wieku. Badania z udziałem dorosłych wskazują na

to, że im wyższy poziom umiejętności, tym słabszy efekt (Hoffmann et al., 2014), podczas gdy badania z dziećmi sugerują, że lepsze kompetencje idą w parze z silniejszym efektem SNARC (Georges, Hoffmann, Schiltz, 2017).

Zadaniem, w którego przypadku poziom wykonania jest z kolei wyraźnym predyktorem kompetencji arytmetycznych, jest szacowanie miejsca liczby na osi liczbowej (ang. *Number Line Estimation*). Wymaga ono operowania MNL, więc również odnosi się do ukierunkowanego (lewo-prawo) uporządkowania przestrzennego reprezentacji umysłowych liczb i ich rozmieszczenia w określonych interwałach. Polega na pomiarze umiejętności przestrzennej lokalizacji liczby na osi pozbawionej podziałki i zaznaczonych na niej wartości (z wyjątkiem początkowej i końcowej, choć czasem stosuje się oś z zaznaczoną tylko jedną z tych dwóch wartości). Teoretyczne modele (Ashcraft, Moore, 2012; Rouder, Geary, 2014) opisują zmiany rozwojowe w zakresie zdolności dopasowywania wartości liczbowych do miejsc na osi. Porównanie wielkości błędu szacowania miejsca poszczególnych liczb na osi u dzieci młodszych i starszych wyraźnie pokazuje, że w procesie rozwoju kształt krzywej ilustrującej precyzję tego dopasowania zmienia się z logarytmicznego (wynikającego z błędów w szacowaniu u dzieci w wieku przed-szkolnym) na liniowy.

Szereg badań dowodzi (Booth, Siegler, 2006), że reprezentacja liniowa odzwierciedlająca dużą precyzję w lokalizowaniu miejsca liczb na osi w takim zadaniu jest predyktorem umiejętności szkolnych w zakresie arytmetyki. Dzieci z trudnościami w nauce matematyki prezentują wyraźnie niższy poziom precyzji szacowania lokalizacji liczb, co widoczne jest w kształcie krzywej odzwierciedlającej dokładność takiego dopasowania (Geary et al., 2012; Gut et al., 2018). Dodatkowo wykazano, że korelacja między wspomnianą precyzją a poziomem umiejętności jest silniejsza dla dodawania i odejmowania niż dla mnożenia, ale np. związek między tą precyzją a początkowymi (wczesnymi) umiejętnościami arytmetycznymi został dowiedziony tylko w przypadku szacowania miejsca liczb na osi z określoną wartością początkową i końcową (Link, Nuerk, Moeller, 2014; Cipora et al., 2015).

Trening mentalnej osi liczbowej z wykorzystaniem gier

Czy opisane wyżej umysłowe reprezentacje liczb oraz zależności numeryczno-przestrzenne można ćwiczyć przy użyciu specjalnie opracowanych programów treningowych? Jakie zastosowanie w rozwoju kompetencji matematycznych mają takie komputerowo wspierane metody jak gry? A jeśli przyczyniają się do kształtowania tego rodzaju umiejętności w edukacji matematycznej (w pracy z dziećmi prawidłowo rozwijającymi się), to czy mogą

być także skuteczne w pokonywaniu wyżej wspomnianych deficytów obecnych w dyskalkulii, jako narzędzie terapii?

Wyniki badań dowodzą niezaprzeczalnych korzyści wynikających ze stosowania metod treningu funkcji poznawczych, a użycie komputerowo wspieranych technologii wzmacnia rozwój wielu umiejętności (nie tylko matematycznych, ale też np. językowych). Pozwalają one również pokonywać trudności w zakresie tych umiejętności (np. obserwowane w dyskalkulii), a zatem tego rodzaju programy terapeutyczne dają obiecujące rezultaty. Nie jest więc zaskakujące to, że takie metody mogą być pomocne w przypadku pracy z dziećmi wymagającymi szczególnego wsparcia edukacyjnego (Kroesbergen, Van Luit, 2003; Moeller et al., 2015). Niekwestionowana przewaga programów komputerowych polega na tym, że są one bardziej popularne i dostępne dla dzieci, które po prostu preferują tego typu metody ćwiczeń (Vernadakis et al., 2005). Najważniejszą kwestią jest to, że takie narzędzia edukacyjne bądź terapeutyczne wykorzystują zadania utrwalające zależności numeryczno-przestrzenne, poczucie liczby, związek między faktami arytmetycznymi a znaczeniem ich komponentów. Deficyty związane z tymi umiejętnościami są natomiast – jak wspomniano wcześniej – obserwowane w dyskalkulii, więc takie programy ćwiczeń powinny być skoncentrowane na utrwalaniu powiązania między liczbami a przestrzenią (Kucian et al., 2011). Jak wiemy, ocenę tej relacji, jak również jej kształtowanie można realizować za pomocą zadań bazujących na szacowaniu miejsca liczb na osi bez podziałki (Siegler, Opfer, 2003).

Przestrzenne reprezentacje liczb mogą być wzmacniane i utrwalane również za pomocą papierowych gier planszowych i innych niekomputerowych metod (Opfer, Siegler, 2007; Cipora, Szczygieł, 2013a). Choć gry „analogowe” nie są przedmiotem rozważań w niniejszym przeglądzie literatury, warto wspomnieć korzyści interwencji z ich użyciem. Pozytywny wpływ dotyczy jednak przede wszystkim gier z liniowym układem pól na planszy. Zdaniem Roberta S. Sieglera (2009, za: Cipora, Szczygieł, 2013a) ćwiczenia z wykorzystaniem takich gier matematycznych przyczyniają się do ukształtowania liniowego kształtu krzywej dopasowania szacowanych lokalizacji liczb do ich właściwego miejsca na osi. Gry takie muszą jednak spełniać szereg warunków: pola muszą być kolejno ponumerowane, mieć taką samą wielkość, być uporządkowane liniowo, a numeracja pól powinna wzrastać od lewej do prawej. Badania nad skutecznością tego rodzaju treningów wykazały bardzo wyraźną poprawę, szczególnie w przypadku dzieci ze środowisk o niskim statusie socjoekonomicznym, np. w zakresie liniowości przestrzennych reprezentacji liczb, porównywania, identyfikacji liczb czy dokonywania operacji arytmetycznych.

Mimo wspomnianych korzyści płynących z zastosowania gier planszowych obecnie użycie technologii komputerowych staje się dominujące i bardziej efektywne (Räsänen et al., 2009; Butterworth et al., 2011; Moeller et al., 2015). Korabinian Moeller, Ursula Fisher, Hans-Christoph Nuerk i Ulrike Cress (2015) argumentują, że techniki wspierane komputerowo poza ogólnym treningiem przetwarzania liczb zawierają też elementy interakcji (które są związane z rywalizacją), angażują uczestników i wzbudzają ich wewnętrzną motywację (Boyle, Connolly, Hainey, 2011). Dostarczają one także informacji zwrotnej, wzmacniającej proces przyswajania wiedzy (Cameron, Dwyer, 2005) oraz mogą być opracowywane dla dzieci różniących się początkowym poziomem umiejętności matematycznych. Oznacza to, że gra może być dopasowana do określonego poziomu możliwości (a więc trudności zadania) na starcie. Warto jednakże podkreślić, że – na co zwraca uwagę np. metaanaliza przeprowadzona przez Ursulę Fischer, Korabiniana Moellera, Martinę Bientzle, Ulrike Cress i Hansa-Christopha Nuera (2011) – skuteczność komputerowych gier matematycznych zależy od szeregu czynników; ponadto bardzo trudno jest porównywać wyniki poszczególnych badań ze sobą. Wynika to z różnorodności rodzajów treningu, metod pomiaru umiejętności matematycznych stosowanych w celu oceny skuteczności oraz luk metodologicznych, takich jak np. brak zastosowania treningu kontrolnego (gry kontrolnej) lub odpowiednio dobranej grupy kontrolnej (bez treningu) w niektórych projektach badawczych.

Operowanie MNL może być w takim programie ćwiczeniowym zastosowane *explicite* poprzez wykonywanie zadania szacowania miejsca liczb na osi (*Number Line Estimation*). Innym znanym podejściem jest też wprowadzanie treningu osi liczbowej w sposób mniej bezpośredni, w formie przestrzennie ukierunkowanych od lewej do prawej pól, po których porusza się gracz, udzielając poprawnych odpowiedzi. Przykładem gier z pierwszej kategorii są *Calcularis* i *Rescue Calcularis*, opracowane i przetestowane w badaniach przez Karin Kucian i współpracowników (2011), *Number Worlds* zaproponowana przez Sharon Griffin (2004) oraz *Kalkulilo* (Gut et al., 2016; 2017). Drugi typ komputerowych gier matematycznych reprezentuje np. *Number Race* (Wilson et al., 2006a; 2006b) skoncentrowana na umiejętnościach związanych z podstawowym poczuciem liczby (zmysłem numerycznym) i przetwarzaniem różnych formatów liczb. Warto wspomnieć, że opracowano także jej polskojęzyczną wersję, znaną jako *Wyścig liczb* (Cipora, Szczygieł, 2013b). Również gra *Graphogame-Maths* (Räsänen et al., 2009) opiera się na porównywaniu wartości liczbowych prezentowanych w różnych formatach. Jak wykazały wyniki badań z użyciem tych gier, obie poprawiają poziom umiejętności porównywania liczb u dzieci z trudnościami w tym zakresie, ale nie wzmacniają żadnych innych matematycznych

kompetencji (Räsänen et al., 2009). Ocena skuteczności gry zastosowanej przez Annę J. Wilson, Susannah K. Revkin, Davida Cohena, Laurenta Cohena oraz Stanisława Dehaene (2006a) wykazała z kolei poprawę nie tylko w zakresie porównywania liczb, ale też odejmowania czy subitacji. Ich późniejsze badania (Wilson et al., 2009) ujawniły również wpływ gry *Number Race* w postaci poprawy w porównywaniu liczb przedstawianych w postaci symbolicznej, ale nie w postaci niesymbolicznej. Niedawno przeprowadzone kolejne systematyczne badania nad skutecznością tej gry (Sella et al., 2016) wskazują na to, że u dzieci w wieku przedszkolnym skutek interwencji widać wyraźną poprawę w obszarach liczenia w pamięci oraz zależności numeryczno-przestrzennych. Małgorzata Gut i współpracownicy (2017) dowiedli z kolei korzystnego wpływu treningu z grą *Kalkulilo* na precyzję szacowania miejsca liczb na osi u dzieci prawidłowo się rozwijających.

Bazując na tych wynikach, autorzy rozpoczęli badania nad skutecznością wspomnianej gry u dzieci z ryzykiem dyskalkulii. Efektywność treningu poznawczego w postaci gier komputerowych została też wykazana w badaniach z neuroobrazowaniem. Okazuje się, że poprawa na poziomie behawioralnym (operowanie osi liczbową) manifestuje się zmianami w organizacji funkcjonalnej mózgu w obszarach kluczowych dla umiejętności numerycznych. W badaniach K. Kucian i współpracowników (2011) z udziałem dzieci z dyskalkulią i ich prawidłowo rozwijających się rówieśników wykazano, że trening szacowania miejsca liczb na osi z użyciem komputerowej gry matematycznej skutkuje poprawą w zakresie operowania MNL i umiejętności arytmetycznych. Jednocześnie jednak koreluje to z obserwowanym u wszystkich dzieci spadkiem aktywacji w zaangażowanych w te procesy obszarach ciemieniowych po odbyciu ćwiczeń z grą. Taka redukcja pobudzenia jest tu interpretowana jako typowy, znany z literatury, neuronalny efekt wytrenowania i automatyzacji umiejętności, co związane jest z możliwością mniejszego wydatkowania energii. Co więcej, w grupie dzieci z dyskalkulią wykazano po treningu wzrost poziomu aktywacji w obszarach, w których przed treningiem nie rejestrowano aktywacji. Badacze opisują ten rezultat jako „wskrzeszenie” aktywności regionów korowych objętych nieprawidłowościami rozwojowymi w dyskalkulii.

Umiejętności matematyczne wspierane ruchem

Choć procesy poznawcze i ruchowe mogą z pozoru wydawać się niepowiązane, wyniki badań dowodzą, że jest to wnioskowanie bardzo dalekie od prawdy (Witkowska, Gut, 2018). Badania potwierdzają wpływ aktywności ruchowej na przetwarzanie poznawcze. Ich wyniki wskazują bowiem, że przejawy niektórych typów zależności numeryczno-przestrzennych mogą

być modulowane przez różne rodzaje doświadczeń cielesnych. Ponadto dowiedziono, że neuronalny system motoryczny poza kontrolą ruchów dowolnych jest w równie wysokim stopniu zaangażowany w związek między percepcją a wykonaniem (*perception-action*), co stanowi jego znaczny wkład w przetwarzanie poznawcze.

Procesy umysłowe będące podstawą posługiwania się liczbami nie są „oderwane” od fizycznej rzeczywistości, ale ściśle powiązane z aktywnością taką jak np. grupowanie obiektów, rozmieszczanie ich w przestrzeni i spostrzeganie ich ruchu, orientacja ciała w przestrzeni i percepcja podstawowych relacji przestrzennych (Hohol, 2011). George Lakoff i Rafael Núñez (2000) podkreślają, że dla tworzenia abstrakcyjnych pojęć matematycznych bardzo ważna jest sprawność motoryczna i jej programy związane z inicjowaniem, zaprzestawianiem, wznawianiem i korygowaniem ruchu w odniesieniu do określonego celu działania. A zatem nie jest niczym zaskakującym, że aktywność ruchowa wpływa na rozwój umiejętności matematycznych, zwłaszcza że zdolności te rozwijają się dzięki aktywności dziecka w przestrzeni, sprawność motoryczna umożliwia zaś taką aktywność poprzez eksplorację otoczenia. Potwierdzeniem tej zależności są wyniki badań wskazujące na to, że dzieci, które charakteryzują się lepszą kondycją ruchową, są także sprawniejsze w wykonywaniu zadań matematycznych oraz robią największe postępy w tym zakresie (Cameron et al., 2012). Elin Reikerås, Thomas Moser i Finn Egil Tønnessen (2015) analizując korelację między zdolnościami numerycznymi a sprawnością motoryczną u dzieci w wieku przedszkolnym, wykazali, że ta ostatnia jest predyktorem umiejętności matematycznych. Do podobnych konkluzji doszli także Dawid W. Grissmer i współpracownicy (2014, za: Verdin et al., 2014), stwierdzając, że wykonywanie przez dzieci m.in. pewnych zadań konstrukcyjnych i posługiwanie się orientacją przestrzenną pozytywnie koreluje z wynikami w zakresie czytania i matematyki.

Wykazano, że nawet gestykulacja usprawnia rozwiązywanie matematycznych problemów przez uczniów (Goldin-Meadow, Wagner Alibali, 2001). Inne dowody związku między przetwarzaniem liczb a zaangażowaniem ruchów ciała to na przykład wyniki wskazujące na to, że sposób liczenia na palcach wpływa istotnie na efekt SNARC (Fischer, 2008) oraz na umiejętność porównywania liczb i wykonywania prostych zadań arytmetycznych u dzieci (Klein et al., 2011). Przeprowadzono też badania, które dowodzą, że ludzie podczas swobodnego losowego generowania liczb wymieniają więcej tych o mniejszej wartości, kiedy zwrócą głowę w lewo, natomiast więcej liczb wysokich po zwróceniu głowy w prawo (Loetscher, Brugger, 2007).

Zależność między aktywnością ruchową a przetwarzaniem liczb jest ponadto obustronna (Shaki, Fischer, 2014). W związku z tym pewne typy

zależności numeryczno-przestrzennych podlegają oddziaływaniu ruchów ciała; na bazie wyników badań świadczących o tym związku opracowuje się metody treningu poznawczo-ruchowego do zastosowania w rozwijaniu podstawowych kompetencji matematycznych (Moeller et al., 2015). Z tego powodu w programach treningu umiejętności matematycznych stosuje się urządzenia takie jak maty taneczne czy czujniki ruchu Kinect. Poza samym pomiarem i wykorzystaniem dużej motoryki w przetwarzaniu materiału numerycznego użycie takich narzędzi skutkuje też wzrostem motywacji użytkowników (nie tylko dzieci, ale też np. pacjentów z deficytami poznawczymi), co z kolei przekłada się na korzyści w osiąganiu celów programu (edukacyjnego lub terapeutycznego). Ruchy ciała mogą być wykorzystane do wsparcia nabywania pewnych zdolności z użyciem zadań o charakterystykach przestrzennych. Aktywacja przestrzennej reprezentacji osi liczbowej kształtuje i utrwała MNL, a w konsekwencji podnosi poziom umiejętności arytmetycznych. Tanja Dackermann ze współpracownikami (2017) dokonała przeglądu i podjęła dyskusję dotyczącą wyników badań uzyskanych w serii eksperymentów w kontekście proponowanych modeli opisujących mechanizmy leżące u podstaw efektywności treningów ruchowo-poznawczych. Opracowane przez badaczy programy zostały zaprojektowane ściśle w celu usprawniania przestrzennych reprezentacji wartości liczbowych oraz pewnych bazowych kompetencji matematycznych. Na przykład Ursule Fischer, Korabinian Moeller, Martina Bientzle, Ulrike Cress oraz Hans-Christoph Nuerk (2011) użyli maty tanecznej do wykonywania przez dzieci w wieku przedszkolnym zadania angażującego zależność numeryczno-przestrzenną, polegającego na porównywaniu prezentowanych liczb z jedną liczbą narzuconą w ćwiczeniu przez instrukcję poprzez skakanie w lewo / prawo. Rezultat porównano z efektem obserwowanym w grupie kontrolnej, wykonującej podobne zadanie, ale z użyciem tabletu. Dzieci trenujące z matą taneczną były w post-teście bardziej dokładne w szacowaniu miejsca liczb na osi oraz w przeliczaniu (mimo że umiejętność ta nie była trenowana). W innym badaniu dzieci wykonywały zadanie szacowania miejsca liczb na osi poprzez angażowanie ruchów całego ciała (rejestrowanych przez czujnik Kinect) wzdłuż trzymetrowej osi liczbowej umieszczonej na podłodze (Link et al., 2013). Skutkowało to poprawą wykonania zadania dotyczącego szacowania miejsca liczb na osi oraz odzwierciedleniem (transferem) tego efektu również w umiejętności dodawania. W kolejnych badaniach z wykorzystaniem technologii Kinect dzieci trenowały dzielenie osi na równomierne odcinki oddzielające sąsiadujące liczby. Ich ruchy były rejestrowane przez czujnik w celu wyświetlania informacji zwrotnej o poprawności (dokładności) podziału. Wpłynęło to pozytywnie na poziom wykonania zadania, a także spowodowało poprawę umiejętności szacowania miejsca liczby na osi.

Badania z użyciem gry *Kalkulilo* wykorzystującej sterowanie za pomocą czujnika Kinect (Gut et al., 2017) wykazały, że zaangażowanie ruchu w grze daje jeszcze lepsze efekty w szacowaniu miejsca liczby na osi niż te uzyskane w grupie trenującej z grą z klasycznym sterowaniem (na laptopie). Ponadto przyspiesza to porównywanie liczb prezentowanych w różnych formatach (symbolicznym i niesymbolicznym). W jeszcze innym eksperymencie (Fischer et al., 2015) dzieci poruszały się wzdłuż interaktywnej tablicy, ćwicząc szacowanie miejsca liczb na osi. Stosując dwa warunki kontrolne (to samo zadanie trenowane na tablicy oraz inne zadanie – rozróżnianie kolorów z użyciem interaktywnej tablicy i ruchów ciała), badacze wykazali, że wyraźniejsza poprawa w precyzji lokalizacji miejsca liczby jest widoczna po poznawczo-ruchowym treningu zadania z osią liczbową. W nieco wcześniejszych badaniach Tanji Link, Hansa-Christopha Nuerka oraz Korabiniana Moellera (2014) dzieci szacowały miejsce liczby na osi poprzez nadeptywanie pól (lewego / prawego) maty tanecznej. Ponownie efektywność takiego rodzaju treningu była znacznie wyższa niż treningu kontrolnego (bez maty), a skuteczność okazała się szczególnie widoczna w przypadku liczb dwucyfrowych (co wiązało się z większym wysiłkiem poznawczym).

Przytoczone tu wyniki badań wyraźnie wskazują więc na ogromne korzyści poznawcze wynikające z włączenia ruchu w ćwiczenie umiejętności matematycznych. Taki trening MNL stanowi zatem skuteczne podejście w kształtowaniu u dzieci mentalnych reprezentacji liczb i w pokonywaniu deficytów w dyskalkulii.

Podsumowanie

Jak widać, przeprowadzono szereg badań, których wyniki niezaprzeczalnie wskazują na korzystny wpływ opisanych wyżej komputerowych gier matematycznych oraz programów ćwiczeń angażujących tzw. „dużą motorykę”. Techniki te okazują się skuteczne, ponieważ ingerują (z pozytywnym skutkiem) w organizację funkcjonalną struktur mózgowych odpowiedzialnych za rozwój umiejętności matematycznych, dzięki czemu wywołują korzystne zmiany neuroplastyczne. U dzieci prawidłowo rozwijających się prowadzi to do stymulowania rozwoju kompetencji numerycznych i utrwalania zależności liczbowo-przestrzennej, a to przekłada się na późniejszy poziom umiejętności szkolnych w zakresie arytmetyki. W przypadku dzieci z dyskalkulią metody takie pozwalają natomiast kształtować umysłowe reprezentacje, które u tych uczniów nie funkcjonują właściwie. Stanowią więc one atrakcyjną i skuteczną formę pomocy w pokonywaniu trudności, z jakimi dzieci się borykają. Tym samym mogą służyć za metody niezbędne zarówno w edukacji, jak i terapii. Prowadzi to do wniosku, że warto korzystać

z takich narzędzi oraz projektować nowe programy ćwiczeń wykorzystujące tego typu sprawdzone pomysły o dowiedzionym naukowo mechanizmie działania, choćby nawet proste zabawy ruchowe lub taneczne.

Bibliografia

- Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews. Neuroscience*, 9, 278–291.
- Arsalidou, M., Taylor, M.J. (2011). Is $2+2=4$? Meta-analyses of brain areas needed for numbers and calculations? *Neuroimage*, 54, 2382–2393.
- von Aster, M.G., Shalev, R.S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 49(11), 868–873.
- Ashcraft, M.H., Moore, A.M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 246–267.
- Bijeljac-Babic, R., Bertoni, J., Mehler, J. (1993). How do four-day-old infants categorize multisyllabic utterances? *Developmental Psychology*, 29, 711–721.
- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33, 1410–1419.
- Booth, J.L., Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189–201.
- Boyle, E.A., Connolly, T.M., Hainey, T. (2011). The role of psychology in understanding the impact of computer games. *Entertainment Computing*, 2, 69–74.
- Brożek, B., Hohol, M. (2018). *Umysł matematyczny. Dlaczego matematykę potrafi uprawiać tylko jeden gatunek – Homo sapiens?* Kraków: Copernicus Center Press.
- Bugden, S., Price, G.R., McLean, D.A., Ansari, D. (2012). The role of the left intraparietal sulcus in the relationship between symbolic number processing and children's arithmetic competence. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 2, 448–457.
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46, 3–18.
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Science*, 14, 534–541.
- Butterworth, B., Varma, S., Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education. *Science*, 332, 1049–1053.
- Cameron, B., Dwyer, F. (2005). The effect of online gaming, cognition and feedback type in facilitating delayed achievement of different learning objectives. *Journal of Interactive Learning Research*, 16, 243–258.
- Cameron, C.E., Brock, L.L., Murrah, W.B., Bell, L.H., Worzalla, S.L., Grissmer, D., Morrison, F.J. (2012). Fine motor skills and executive function both contribute to kindergarten achievement. *Child Development*, 83(4), 1229–1244.
- Cao, B., Li, F., Li, H. (2010). Notation-dependent processing of numerical magnitude: electrophysiological evidence from Chinese numerals. *Biological Psychology*, 83, 47–55.

- Cipora, K., Nuerk, H.-C. (2013). Is the SNARC effect related to the level of mathematics? No systematic relationship observed despite more power, more repetitions, and more direct assessment of arithmetic skill. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 66, 1974–1991.
- Cipora, K., Patro, K., Nuerk, H.-C. (2015). Are spatial-numerical associations genuinely correlated with math performance? A review and taxonomy proposal. *Mind, Brain, and Education*, 9, 190–206.
- Cipora, K., Szczygieł, M. (2013a). Gry planszowe jako narzędzie wspomaganie rozwoju wczesnych kompetencji matematycznych. *Edukacja*, 3(123), 60–75.
- Cipora, K., Szczygieł, M. (2013b). Wyścig liczb – The number race – polska wersja językowa narzędzia wczesnej interwencji w przypadku ryzyka dyskalkulii rozwojowej oraz wspomaganie rozwoju kompetencji arytmetycznych. *Psychologia – Etologia – Genetyka*, 27, 71–85.
- Dackermann, T., Fischer, U., Nuerk, H.-C., Cress, U., Moeller, K. (2017). Applying embodied cognition: from useful interventions and their theoretical underpinnings to practical applications. *ZDM Mathematics Education*, 49, 545–557.
- Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic – An fMRI study. *Brain Research: Cognitive Brain Research*, 18, 76–88.
- Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology*, 122, 371–396.
- Dehaene, S., Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33, 219–250.
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., Wilson, A.J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218–224.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487–506.
- Eger, E., Sterzer, P., Russ, M.O., Giraud, A.L., Kleinschmidt, A. (2003). A supramodal number representation in human intraparietal cortex. *Neuron*, 37, 719–725.
- Fias, W., Fischer, M.H. (2005). Spatial representation of number. In: J.I.D. Campbell (Eds.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 43–54). New York and Hove: Psychology Press.
- Fias, W., van Dijck, J.-P., Gevers, W. (2011). How is number associated with space? The role of working memory. In: S. Dehaene, E.M. Brannon (Eds.), *Space, time and number in the brain. Searching for the foundations of mathematical thought* (pp. 133–148). London: Burlington & San Diego: Elsevier.
- Fischer, M.H. (2008). Finger counting habits modulate spatial-numerical associations. *Cortex*, 44, 386–392.
- Fischer, M.H., Shaki, S. (2014). Spatial associations in numerical cognition – From single digits to arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(8), 1461–1483.
- Fischer, M.H., Shaki, S., Cruise, A. (2009). It takes just one word to quash a SNARC. *Experimental Psychology*, 56, 361–366.

- Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., Nuerk, H.-C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(1), 177–183.
- Fischer, U., Moeller, K., Huber, S., Cress, U., Nuerk, H.-C. (2015). Full-body movement in numerical trainings: A pilot study with an interactive whiteboard. *International Journal of Serious Games*, *2*, 23–35.
- van Galen, M., Reitsma, P. (2008). Developing access to number magnitude: A study of the SNARC effect in 7- to 9-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology*, *101*, 99–113.
- Ganor-Stern, D., Tzelgov, J. (2008). Across-notation automatic numerical processing. *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory and Cognition*, *34*, 430–437.
- Geary, D.C., Hoard, M.K., Byrd-Craven, J., DeSoto, C.M. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *88*, 121–151.
- Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L., Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, *33*, 277–299.
- Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L., Bailey, D.H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, *104*, 206–223.
- Georges, C., Hoffmann, D., Schiltz, C. (2017). Mathematical abilities in elementary school: Do they relate to number–space associations? *Journal of Experimental Child Psychology*, *161*, 126–147.
- Goldin-Meadow, S., Alibali, M.W. (2001). Gesture's Role in Speaking, Learning, and Creating Language. *Annual Review in Psychology*, *64*, 257–283.
- Griffin, S.A. (2004). Building number sense with Number Worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 173–180.
- Gut, M., Goraczewski, Ł., Matulewski, J., Finc, K., Ignaczewska, A., Bałaj, B., Dreszer, J., Kmiciek, M., Stępińska, J., Majewski, J., Bendlin, E., Cholewa, P., Duch, W. (2016). Trening poznawczy przy użyciu komputerowej gry matematycznej a przetwarzanie informacji numerycznej u dzieci – wyniki badań pilotażowych. W: M. Suchacka (red.), *Cywilizacja zabawy, rozrywki i wypoczynku* (s. 57–83). Wydawnictwo internetowe e-bookowo.
- Gut, M., Goraczewski, Ł., Matulewski, J., Finc, K., Mańkowska, K., Babiuch, K., Ciechalska, D., Mielewczyk, A., Poczopko, K., Witkowska, N., Duch, W. (2017). *The cognitive-motor training in development of a mental number line with the use of the mathematical computer game "Kalkulilo"*. Poster prezentowany na konferencji 2017 European Congress of Psychology, Amsterdam, Holandia.
- Gut, M., Goraczewski, Ł., Finc, K., Matulewski, J., Walerzak-Więckowska, A., Duch, W. (2018). Number line estimation performance for one-digit numbers in children with low-numeracy skills and typically developing controls (w druku).
- de Hevia, M.D., Spelke, E.S. (2010). Number-space mapping in human infants. *Psychological Science*, *21*, 653–660.

- Hoffmann, D., Mussolin, C., Martin, R., Schiltz, C. (2014). The Impact of Mathematical Proficiency on the Number-Space Association. *PLOS ONE*, 9(1), e85048.
- Hohol, M.L. (2011). Matematyczność ucieleśniona. W: B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, M.L. Hohol (red.), *Oblicza racjonalności. Wokół myśli Michała Hellera* (s. 143–166). Kraków: Copernicus Center Press.
- Houde, O., Sandrini, R., Lubin, A., Joliot, M. (2010). Mapping numerical processing, reading, and executive functions in the developing brain: An fMRI meta-analysis of 52 studies including 842 children. *Developmental Science*, 13(6), 876–885.
- Hubbard, E.M., Piazza, M., Pinel, P., Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews. Neuroscience*, 6, 435–448.
- Isaacs, E.B., Edmonds, C.J., Lucas, A., Gadian, D.G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birth weight: A neural correlate. *Brain*, 124, 1701–1707.
- Klein, E., Moeller, K., Willmes, K., Nuerk, H.-C., Domahs, F. (2011). The influence of implicit hand-based representations on mental arithmetic. *Frontiers in Psychology*, 2(197), 1–7.
- Kroesbergen, E.H., Van Luit, E.H.J. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs. A Meta-Analysis. *Remedial & Special Education*, 24, 97–114.
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, 57, 782–795.
- Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Dosch, M., Martin, E., von Aster, M. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: A functional MRI study. *Behavioral & Brain Functions*, 2, 31.
- Lakoff, G., Núñez, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
- Lammertyn, J., Fias, W., Lauwereyns, J. (2002). Semantic influences on feature-based attention due to overlap of neural circuits. *Cortex*, 38, 878–882.
- Landerl, K., Bevanm, A., Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93, 99–125.
- Landerl, K., Kaufmann, L. (2015). *Dyskalkulia*. Gdańsk: Harmonia Universalis.
- Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., Nuerk, H.-C. (2013). Walk the number line – An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience & Education*, 2, 74–84.
- Link, T., Nuerk, H.-C., Moeller, K. (2014). On the relation between the mental number line and arithmetic competencies. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67, 1597–1613.
- Loetscher, T., Brugger, P. (2007). Exploring number space by random digit generation. *Experimental Brain Research*, 180, 655–665.
- Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H.-C., Cress, U. (2015). Computers in mathematics education – Training the mental number line. *Computers in Human Behavior*, 48, 597–607.
- Mussolin, C., De Volder, A., Grandin, C., Schlögel, X., Nassogne, M.C., Noël, M.P. (2009). Neural correlates of symbolic number comparison in developmental dyscalculia. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 22, 860–874.

- Nieder, S., Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185–208.
- Opfer, J.E., Siegler, R.S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, 169–195.
- Patro, K., Haman, M. (2012). The spatial-numerical congruity effect in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111, 534–542.
- Patro, K., Nuerk, H.-C., Cress, U., Haman, M. (2014). How number-space relationships are assessed before formal schooling: A taxonomy proposal. *Frontiers in Psychology*, 5, 419.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116, 33–41.
- Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D., Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron*, 53, 293–305.
- Price, G.R., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M., Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, 17, 1042–1043.
- Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A., Aunio, P., Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24, 450–472.
- Reikerås, E., Moser, T., Tønnessen, F.E. (2015). Mathematical skills and motor life skills in toddlers: Do differences in mathematical skills reflect differences in motor skills? *European Early Childhood Education Research Journal*, 25(1), 1–17.
- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, 83, 274–278.
- Rotzer, S., Kucian, K., Martin, E., von Aster, M., Klaver, P., Loenneker, T. (2008). Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, 39, 417–422.
- Rouder, J.N., Geary, D.C. (2014). Children's cognitive representation of the mathematical number line. *Developmental Science*, 17(4), 525–536.
- Rousselle, L., Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs. nonsymbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102, 361–395.
- Rugani, R., Vallortigara, G., Priftis, K., Regolin, L. (2015). Number-space mapping in newborn chick resembles humans' mental number line. *Science*, 347, 534–536.
- Rykhlevskaia, E., Uddin, L.Q., Kondos, L., Menon, V. (2009). Neuroanatomical correlates of developmental dyscalculia: Combined evidence from morphometry and tractography. *Frontiers in Human Neuroscience*, 3, 51.
- Sandrini, M., Rusconi, E. (2009). A brain for numbers. *Cortex*, 45, 796–803.
- Sella, F., Tressoldi, P., Lucangeli, D., Zorzi, M. (2016). Training numerical skills with the adaptive videogame "The Number Race". *Trends in Neuroscience and Education*, 5(1), 20–29.
- Shaki, S., Fischer, M.H. (2014). Random walks on the mental number line. *Experimental Brain Research*, 232(1), 43–49.

- Shaki, S., Fischer, M.H., Petrusic, W.M. (2009). Reading habits for both words and numbers contribute to the SNARC effect. *Psychonomic Bulletin & Review*, 16(2), 328–331.
- Shalev, R.S. (2007). Prevalence of developmental dyscalculia. In: D.B. Berch, M.M.M. Mazocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 49–60). Baltimore, MD: Paul H Brookes Publishing.
- Shalev, R.S., Manor, O., Gross-Tsur, V. (2005). Developmental dyscalculia: A prospective six-year follow-up. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 47, 121–125.
- Siegler, R.S., Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237–243.
- Simon, O., Kherif, F., Flandin, G., Poline, J.B., Riviere, D., Mangin, J.F., Le Bihan, D., Dehaene, S. (2004). Automated clustering and functional geometry of human parietofrontal networks for language, space, and number. *Neuroimage*, 23, 1192–1202.
- Skibska, J. (2015). Neuroplastyczność mózgu wsparciem rozwojowym dziecka we wczesnym dzieciństwie. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Humanitas. Pedagogika*, 10, 79–92.
- Trojan, M. (2013). *Na tropie zwierzęcego umysłu*. Warszawa: Scholar.
- Verdine, B.N., Irwin, C.M., Golinkoff, R.M., Hirsh-Pasek, K. (2014). Contributions of Executive Function and Spatial Skills to Preschool Mathematics Achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 126, 37–51.
- Vernadakis, N., Avgerinos, A., Tsitskari, E., Zachopoulou, E. (2005). The use of computer assisted instruction in preschool education: Making teaching meaningful. *Early Childhood Education Journal*, 33, 99–104.
- Wilson, A.J., Dehaene, S., Dubois, O., Fayol, M. (2009). Effects of an Adaptive Game Intervention on Accessing Number Sense in Low-Socioeconomic-Status Kindergarten Children. *Mind, Brain, and Education*, 3, 224–234.
- Wilson, A.J., Revkin, S.K., Cohen, D., Cohen, L., Dehaene, S. (2006a). An open trial assessment of “The Number Race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavior & Brain Functions*, 2, 20.
- Wilson, A.J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S.K., Cohen, L., Cohen, D. (2006b). Principles underlying the design of “The Number Race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavior & Brain Functions*, 2, 19.
- Witkowska, N., Gut, M. (2018). Znaczenie ruchu w edukacji matematycznej. Ucieleśnione poznanie a kształtowanie się umysłowych reprezentacji liczb u dzieci. *Kognitywistyka i media w edukacji*, 1, 128–149.
- Wood, G., Fischer, M.H. (2008). Numbers, space, and action – from finger counting to the mental number line and beyond. *Cortex*, 44, 353–358.
- Wood, G., Willmes, K., Nuerk, H.-C., Fischer, M. (2008). On the cognitive link between space and numbers: A meta-analysis of the SNARC effect. *Psychology Science*, 50(4), 489–525.